Matemáticas III

Relación de ejercicios Tema 6

Ejercicios

Ej. 1 — Encuentra una parametrización de las siguientes superficies y calcula el producto vectorial fundamental para dichas parametrizaciones.

1. La porción del plano $x + y - z = 1$ que verifica $z \geq 0$.
2. La porción verificando $1 \leq x - z < 2$ del plano paralelo al eje OZ que contiene al punto $(1, 1, 0)$ y a la dirección $(1, 1, 0)$.
3. La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$, usando coordenadas cartesianas.
4. La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = x + y$.
5. El paraboloide $2z = x^2 + y^2$ con $z \in [0, 1]$, usando coordenadas cartesianas.
6. El paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \in [0, 2]$ como superficie de revolución.
7. El cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
8. La porción de cilindro $x^2 + z^2 = 1$ con $|y| \leq 1$.
9. El cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.
10. La porción de cono $x^2 = y^2 + z^2$ con $x \in [0, 1]$, usando coordenadas cartesianas.
11. El cono $z^2 = x^2 + y^2$ como superficie de revolución.

Ej. 2 — Encuentra una parametrización de las siguientes superficies y calcula el producto vectorial fundamental para dichas parametrizaciones.

1. El cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
2. El paraboloide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$.
3. El elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^3}{c^2} = 1$.
4. El cono $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$.

Ej. 3 —

1. Prueba que si una superficie parametrizada regular tiene la forma $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ con $(x, y) \in D$ entonces la norma del producto vectorial fundamental es
$$\|\Phi_x \times \Phi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$
2. Prueba que para una superficie de revolución con parametrización regular $\Phi(t, \theta) = (x(t) \cos\theta, x(t) \operatorname{sen}\theta, z(t))$ para $(t, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$ la norma del producto vectorial fundamental es
$$\|\Phi_t \times \Phi_\theta\| = |x|\sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

Ej. 4 — Calcula el área de las siguientes superficies.

1. La porción del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
2. La porción del plano $x + y + z = a$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
3. La porción del plano $2x+y+2z = 16$ que está delimitada por los planos $x = 0$, $x+y = 1$, $y = 0$.
4. La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.
5. La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ que está dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$.
6. La porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$.
7. La porción de cono $4z^2 = x^2 + y^2$ interior al cilindro $4 = x^2 + y^2$.
8. La porción de helicoide recto de ecuación en coordenadas cilíndricas $z = \theta$ con $r \in [0, 1]$.

Ej. 5 — Calcula el área de las siguientes superficies.

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2y, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$
2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z^2 - y^2 \leq 1, x \geq y, x, y, z \geq 0\}$

Ej. 6 — Considera el *toro* generado al girar la circunferencia de ecuación $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ con $b < a$ alrededor del eje OZ. Halla el área de dicha superficie.

Ej. 7 — Calcula las siguientes integrales de superficie para campos escalares.

1. $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$ donde S es la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ con $z \geq 1$.
2. $\displaystyle\iint_S x^2 z^2\, dS$ donde S es la porción de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $|z| \leq 1$.
3. $\displaystyle\iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dS$ donde
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

Ej. 8 — Calcula las siguientes integrales de superficie para campos vectoriales.

1. $\displaystyle\iint_S (x, z, 0) \cdot dS$ donde S es la superficie cerrada con orientación exterior
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}.$$
2. $\displaystyle\iint_S (x^2, y^2, 2z^2) \cdot dS$ donde S es la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ con orientación exterior.
3. $\displaystyle\iint_S (x, y, 0) \cdot dS$ donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$ y vectores normales alejándose del origen.

Ej. 9 — Calcula directamente y usando el teorema de Stokes las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\oint_C 3yz^2\, dx + xz^2\, dy + 4xyz\, dz$ donde C es la curva de ecuaciones $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x^2 + y^2 \end{cases}$ orientada positivamente si se observa desde el punto $(0, 0, 1)$.

2. $\oint_C y\,dx + 2x\,dy + z\,dz$ donde $C = C_1 \cup C_2$ es la curva orientada negativamente si se observa desde el origen formada en el primer octante por

$$C_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=z^2 \end{cases} \quad \text{y} \quad C_2 \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$$

3. $\oint_C xz^2\,dx + (x-2y)\,dy + x^2z\,dz$ donde C es el tramo de $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ con $z \geq 0$ orientada positivamente vista desde el origen.

4. $\oint_C x\,dx + y\,dy + z^2\,dz$ donde C es el corte de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2+4y^2=z^2, z \in [0,4]\}$$

con el plano $y = 1$ orientada positivamente.

Ej. 10 — Sea la superficie

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-1 = -(x^2+y^2),\ z \geq x^2+(y-1)^2\right\}$$

orientada de forma que los vectores normales se alejan del origen. Sea el campo vectorial $F(x,y,z) = (xy, -z^2, z)$.

1. Calcula la integral $\iint_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot dS$ directamente.
2. Determina la integral anterior usando el teorema de Stokes.
3. Sea V el volumen

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-1 \leq -(x^2+y^2), z \geq x^2+(y-1)^2\right\}.$$

Halla la integral $\iint_S [\operatorname{rot} F + (x,y,z)] \cdot dS$ mediante el teorema de Gauss donde S es la frontera de V con orientación exterior.

Ej. 11 — Calcula directamente y usando el teorema de Gauss las siguientes integrales.

1. $\iint_S (x^2,y^2,z^2)\cdot dS$ donde S es la porción del cono $x^2+y^2=z^2$ para $z \in [0,1]$ con vectores normales sobre la cara que no mira al eje OZ.
2. $\iint_S (xz,yz,1)\cdot dS$ donde S es la frontera del volumen interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=25$ con $z \geq 3$ usando orientación exterior.
3. $\iint_S (x^3,y^3,z)\cdot dS$ donde S es la porción de $x^2+y^2=1$ para $0 \leq z \leq x+2$ con vectores normales sobre la cara que no mira al eje OZ.
4. $\iint_S (1-2y, 2y^2, 1+x^2)\cdot dS$ donde S es la porción de esfera $x^2+y^2+z^2=4$ con $z \geq 0$ usando orientación exterior.

Ej. 12 — Comprueba el teorema de Gauss en las siguientes situaciones.

1. Para el campo vectorial $F(x,y,z) = (z, y, -x)$ y el volumen

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2y, y \leq 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1,\ 1 \leq y \leq 3-z\}.$$

2. Para el campo vectorial $F(x,y,z) = (y, -x, z^2)$ y el volumen

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 2 - y\right\}.$$

3. Para el campo vectorial $F(x,y,z) = (0, y, 0)$ y el volumen

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le y\right\}.$$

exterior.

Ej. 13 — Sea $F(x,y,z) = (1-y, 2y^2, 1+x^2)$ y $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 - z, z \ge 0\right\}$. Calcula la integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS$, indicando la orientación escogida, de las siguientes formas:

1. directamente,
2. usando el teorema de Stokes,
3. usando el teorema de Gauss.

Ej. 14 — Sean el campo vectorial $F(x,y,z) = (x-1, x, z-2)$ y la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = z,\ z \le 2x\}.$$

1. Calcula directamente $\oint_C F \cdot dC$ donde C es el borde de S con orientación C positiva vista desde el punto $(0,0,2)$.
2. Determina la integral anterior mediante el teorema de Stokes.
3. Halla $\iint_S F \cdot dS$ mediante el teorema de la divergencia.

Ej. 15 — Sea el campo vectorial $F(x,y,z) = (xy, z, y)$.

1. Calcula directamente $\oint_C F \cdot dC$ donde C es la curva intersección entre el paraboloide $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4}$ y el cilindro $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ orientada positivamente si se mira desde el origen.
2. Halla la integral anterior usando el teorema de Stokes.
3. Calcula $\iint_S F \cdot dS$ mediante el teorema de la divergencia, donde S es la frontera del volumen
$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + z^2 \le 1\right\}$$
orientada exteriormente.

Soluciones

Solución (Ej. 2) —

1. $\Phi(u,v) = (a\cos u, b \operatorname{sen} u, v)$, con $0 \le u < 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$.
$\Phi_u \times \Phi_v = (b\cos u, a \operatorname{sen} u, 0)$.

2. $\Phi(u,v) = \big(av\cos u, bv\operatorname{sen} u, v^2\big)$, con $0 \le u < 2\pi$, $v \ge 0$.
   $\Phi_u \times \Phi_v = (2bv^2\cos u, 2av^2\operatorname{sen} u, -abv)$.
3. $\Phi(u,v) = (a\cos u\operatorname{sen} v, b\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, c\cos v)$, con $0 \le u < 2\pi$, $0 \le v \le \pi$.
   $\Phi_u \times \Phi_v = (-bc\cos u\operatorname{sen}^2 v, -ac\operatorname{sen} u\operatorname{sen}^2 v, -ab\cos v\operatorname{sen} v)$.
4. $\Phi(u,v) = (av\cos u, bv\operatorname{sen} u, v)$, con $0 \le u < 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$.
   $\Phi_u \times \Phi_v = (bv\cos u, av\operatorname{sen} u, -abv)$.

Solución (Ej. 4) —

1. $8a^2$.
2. $\sqrt{3}\pi a^2$.
3. $\dfrac{3}{4}$.
4. $2(\pi-2)a^2$.
5. 2π.
6. $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$.
7. $4\sqrt{5}\pi$.
8. $\big(\operatorname{arg\,senh}(1) + \sqrt{2}\big)\,\frac{\theta_1-\theta_0}{2}$

Solución (Ej. 5) — 1. 4π. 2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solución (Ej. 6) — $4\pi^2 ab$.

Solución (Ej. 7) — 1. 6π. 2. $\dfrac{2\pi}{3}$. 3. $\sqrt{2}\pi$.

Solución (Ej. 8) — 1. $\dfrac{\pi}{2}$. 2. 4. 3. $\dfrac{4\pi}{3}$.

Solución (Ej. 9) — 1. $\dfrac{-5\pi}{16}$. 2. $\dfrac{\pi}{8}$. 3. $-\pi$. 4. 0, el campo es irrotacional.

Solución (Ej. 10) — 1. 0. 2. 0. 3. $\dfrac{3\pi}{16}$.

Solución (Ej. 11) — 1. $\dfrac{\pi}{2}$. 2. 128π. 3. 5π. 4. 0.

Solución (Ej. 12) — 1. $\dfrac{8\pi}{3}$. 2. $\sqrt{2}\pi$. 3. $\dfrac{\pi}{32}$.

Solución (Ej. 13) — π. Elegida orientación exterior (visto desde el origen).

Solución (Ej. 14) — 1. y 2. π. 3. π.

Solución (Ej. 15) — Todas las integrales son 0.