Matemáticas III
Tema 6
Integrales de superficie

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

Área de una superficie

Sea $\Phi\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, una parametrización de S y sea $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ su primera forma fundamental.

Definición

Para todo subconjunto D acotado y cerrado tal que $D \subseteq U$ el área de la porción de superficie S con parametrización Φ en D se definie como

$$\text{Área}(S) = \iint_D \sqrt{\det \mathrm{I}}\, dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv =$$
$$= \iint_D \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, dudv$$

La anterior definición es válida para superficies regulares a trozos.

Ejemplo

Calculemos la superficie de una esfera $\mathbb{S}^2(r)$ de radio r.

$$\Phi(\theta,\varphi) = (r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, r\cos\theta) \text{ con } (\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

La primera forma fundamental es $E = r^2$, $F = 0$, $G = r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$, por tanto su área es

$$\text{Área}\left(\mathbb{S}^2(r)\right) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{r^4\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\,d\varphi d\theta = 4\pi r^2$$

Área de superficie definida por un campo

Si f es un campo escalar plano $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^1 sobre un recinto cerrado y acotado $D\subseteq U$ es

$$\iint_D \sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}\,dxdy$$

Integral de superficie de un campo escalar

Sea S regular a trozos con parametrización $\Phi(u,v)$ con $(u,v) \in D$. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un c. e. continuo de forma que $S \subseteq U$.

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f\left(\Phi(u,v)\right) \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, dudv.$$

La integral de superficie es independiente de la parametrización Φ.

Propiedades:

1. $\displaystyle\iint_S (\alpha f + \beta g)\, dS = \alpha \iint_S f\, dS + \beta \iint_S g\, dS.$
2. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ entonces $\displaystyle\iint_S f\, dS \leq \iint_S g\, dS.$
3. Si $S = S_1 \dot{\cup} S_2$, $\displaystyle\iint_S f\, dS = \iint_{S_1} f\, dS + \iint_{S_2} f\, dS.$
4. $\displaystyle\text{Área}(S) = \iint_S dS.$

Ejemplo

Integral del campo $f(x, y, z) = x - 2y + z$ en la superficie S que delimita el cubo de vértices opuestos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ sin la cara superior.

Cara 1: $\Phi_u \times \Phi_v = (0, 0, 1)$

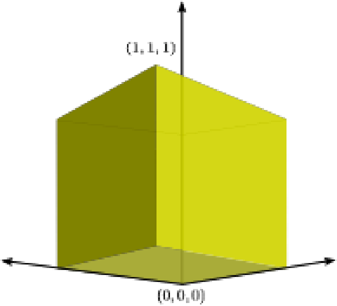
Cara 2: $\Phi_u \times \Phi_v = (0, -1, 0)$

Cara 3: $\Phi_u \times \Phi_v = (1, 0, 0)$

Cara 4: $\Phi_u \times \Phi_v = (0, -1, 0)$

Cara 5: $\Phi_u \times \Phi_v = (1, 0, 0)$

$$\iint_S x - 2y + z \, dS = -\frac{1}{2}$$



Integral de superficie de un campo vectorial. Flujo

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, dudv =$$
$$= \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot N \, \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, dudv.$$

Interpretación del flujo.

La integral de F en S es la integral del campo escalar $f = F(\Phi) \cdot N$ en S.

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F(\Phi(u,v)) \cdot N \, dS$$

• El valor del flujo depende de la dirección elegida del vector N, por tanto, su signo depende de la orientación de la parametrización tomada para S.

• Obsérvese que el flujo es tanto mayor cuando más pequeño sea el ángulo que forman el campo vectorial F y el vector normal N.

Sean $F, G\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales continuos en U y $S \subseteq U$ una superficie parametrizada regular a trozos.

1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces
$\iint_S (\alpha F + \beta G) \cdot dS = \alpha \iint_S F \cdot dS + \beta \iint_S G \cdot dS.$
2. Si $-S$ representa la misma superficie S pero parametrizada con orientación opuesta a la dada inicialmente entonces
$$\iint_{-S} F \cdot dS = -\iint_S F \cdot dS.$$
3. Si $S = S_1 \cup S_2$ disjuntas con las orientaciones dadas por S, entonces
$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS.$$

Ejemplo

Calculemos el flujo exterior del campo vectorial $F(x,y,z) = pz\vec{k}$, con $p \in \mathbb{R}$ constante, a través de la superficie del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ por encima del eje XY.

Parametrizamos la superficie

$$\Phi(u,v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2),\ -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$$

Así el producto vectorial fundamental es

$$\Phi_u \times \Phi_v = (1, 0, -2u) \times (0, 1, -2v) = (2u, 2v, 1)$$

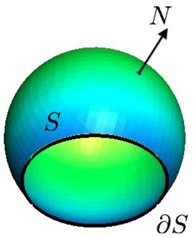
siendo dicho vector exterior a la superficie (para ello, por continuidad, basta comprobarlo en un punto cualquiera de la superficie).
Así

$$\iint_S pz\vec{k} \cdot dS = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} p(1 - u^2 - v^2)\, dudv = \frac{4p}{3}$$

Nota: Obsérvese que podríamos haber usado el gradiente del campo $g(x,y,z) = z + x^2 + y^2 - 1$ para el vector normal a S.

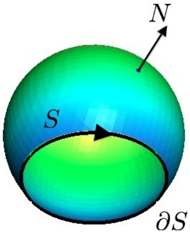
Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera.

Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos.



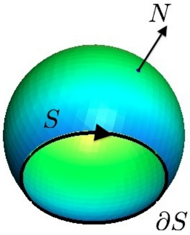
Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera.

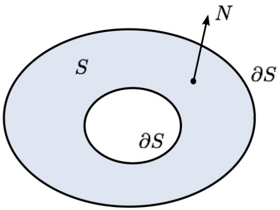
Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos.



Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera.

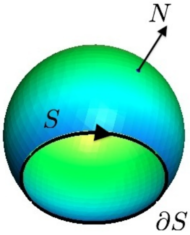
Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos.

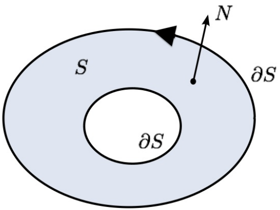




Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera.

Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos.

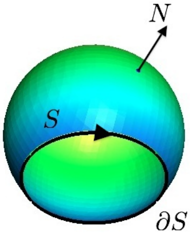


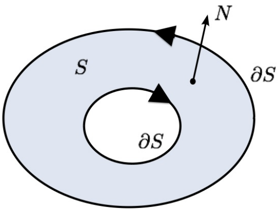


Teorema de Stokes

Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera.

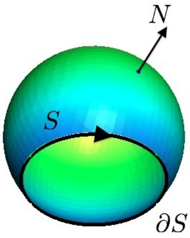
Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos.

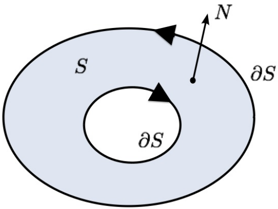


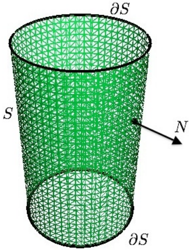


Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera.

Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos.

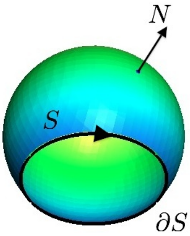


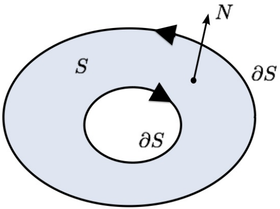


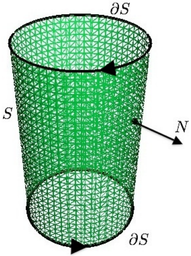


Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera.

Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos.







Teorema de Stokes

El teorema de Stokes generaliza el teorema de Green.

Teorema de Stokes.

Sea S una superficie acotada de $\mathbb{R}^3$ regular a trozos orientable y cuya frontera ∂S es una curva simple regular a trozos. Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U tal que $S \subseteq U$, entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{\partial S} F \cdot dC$$

donde S y ∂S tienen orientaciones compatibles.

Obsérvese que si la superficie sobre la que se integra está contenida en el plano XY el teorema de Stokes es precisamente el teorema de Green.

Ejemplo

Usaremos el teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS$ siendo $F(x, y, z) = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ y S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y en la parte superior del plano XY orientada hacia el interior.

Para hallar la curva frontera ∂S restamos sus ecuaciones y obtenemos $z^2 = 3$. Una parametrización compatible de dicha curva será, entonces $\alpha(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t, \sqrt{3}\right)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ por lo que
$\alpha'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$.
En consecuencia, por el teorema de Stokes:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_C F \cdot dC = \int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\cos t - \operatorname{sen}^2 t)\,dt = -\pi$$

Divergencia de un campo vectorial.

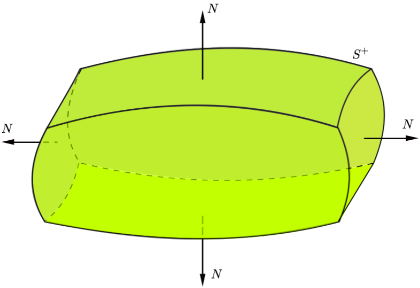
Si $F = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial de tres dimensiones de clase C^1 en un abierto U se llama *divergencia* de F en U al siguiente campo escalar:

$$\mathrm{div}\, F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Superficies cerradas

Una superficie regular a trozos se dice que es **cerrada cuando encierra un volumen**.

En casa superficie cerrada se puede elegir una *orientación interior* S^- o una *orientación exterior* S^+.



Teorema (Teorema de Gauss o de la divergencia)

Sea S una superficie cerrada parametrizada regular a trozos. Sea V el volumen encerrado por S. Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U de forma que $V \subseteq U$ entonces

$$\iint_{S^+} F \cdot dS = \iiint_V div\ F\ dxdydz$$

donde S^+ representa la superficie S tomada con orientación exterior.

Ejemplo

Calculemos el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la esfera $\mathbb{S}^2(2)$.

$$\Phi(u,v) = (2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 2\cos u \operatorname{sen} v, 2\cos v) \text{ con } 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < \pi$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_u &= (2\cos u \operatorname{sen} v, -2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 0) \\
\Phi_v &= (2\operatorname{sen} u \cos v, 2\cos u \cos v, -2\operatorname{sen} v) \\
\Phi_u \times \Phi_v &= (4\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, 4\cos u \operatorname{sen}^2 v, 4\cos v \operatorname{sen} v)
\end{aligned}$$

(comprobamos que tiene orientación exterior)

$$\iint_{\mathbb{S}^2(2)^+} F \cdot dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 8\operatorname{sen} v \, dudv = 32\pi$$

$$\iiint_V 3\,dxdydz = 3\,\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^2(2)\right) = 3\frac{4\pi 2^3}{3} = 32\pi$$

OCW UMA

Rodríguez Sánchez, F.J.

Muñoz Ruiz, M.L.

Merino Córdoba, S.

2014.