Matemáticas III
Tema 6
Integrales de superficie

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

Índice

1. Integrales de superficie **1**
1.1. Área de una superficie 1
1.2. Integral de superficie de un campo escalar 2
1.3. Integral de superficie de un campo vectorial. Flujo 3

2. Cálculo vectorial en el espacio: teorema de Stokes y teorema de Gauss **4**
2.1. Teorema de Stokes 4
2.2. Divergencia. El teorema de Gauss 5

1. Integrales de superficie

1.1. Área de una superficie

Sea $\Phi\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, una parametrización de una superficie regular S donde Φ es de clase C^1 en el abierto U y sea $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ su primera forma fundamental.

Para todo subconjunto D acotado y cerrado tal que $D \subseteq U$ el área de la porción de superficie S con parametrización Φ en D se definie como

$$\text{Área}(S) = \iint_D \sqrt{\det \mathrm{I}}\, dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint_D \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, dudv$$

Puesto que está definida a partir de la primera forma fundamental, el resultado de la integral anterior es el mismo para cualquier parametrización que se tome para S.

La anterior definición es válida para superficies que son regulares excepto en un número finito de puntos, también llamadas *superficies regulares a trozos.*

Ejemplo. Calculemos la superficie de una esfera $\mathbb{S}^2(r)$ de radio r. La podemos parametrizar como

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta) \text{ con } (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

La primera forma fundamental es $E = r^2$, $F = 0$, $G = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$, por tanto su área es

$$\text{Área}\left(\mathbb{S}^2(r)\right) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{r^4 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\varphi d\theta = 4\pi r^2$$

Ejercicio. Comprueba que el área de la gráfica de un campo escalar plano $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre un recinto cerrado y acotado $D \subseteq U$ es

$$\iint_D \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}\, dxdy$$

1.2. Integral de superficie de un campo escalar

Sea S una curva parametrizada regular a trozos con parametrización $\Phi(u,v)$ con $(u,v) \in D$. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de forma que $S \subseteq U$ y f es continuo en S. La integral de superficie de f sobre la superficie S se define como el número

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f\left(\Phi(u,v)\right) \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, dudv.$$

El valor de la integral de superficie es totalmente independiente de la parametrización Φ tomada para S.

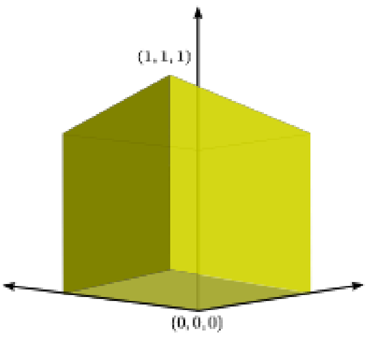
Propiedades de las integrales de superficie para campos escalares

Sean $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos campos escalares continuos en U y $S \subseteq U$ una superficie parametrizada regular a trozos.

1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\iint_S (\alpha f + \beta g)\, dS = \alpha \iint_S f\, dS + \beta \iint_S g\, dS.$
2. Si para todo $(x,y) \in S$ se verifica que $f(x,y) \le g(x,y)$ entonces $\displaystyle\iint_S f\, dS \le \iint_S g\, dS.$
3. Si $S = S_1 \cup S_2$ disjuntas salvo quizás puntos del borde, entonces
$$\iint_S f\, dS = \iint_{S_1} f\, dS + \iint_{S_2} f\, dS.$$
4. El área de la superficie S coincide con la integral de superficie sobre S del campo escalar constante igual a 1, esto es
$$\text{Área}(S) = \iint_S dS.$$

Ejemplo. Calculemos la integral del campo escalar $f(x,y,z) = x - 2y + z$ en la superficie S que delimita el cubo de vértices opuestos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$ sin la cara superior.

Para ello parametrizamos cada una de las cinco caras que forman la superficie.



Cara 1: $\Phi(u,v) = (u,v,0), \Phi_u \times \Phi_v = (0,0,1)$
Cara 2: $\Phi(u,v) = (u,0,v), \Phi_u \times \Phi_v = (0,-1,0)$
Cara 3: $\Phi(u,v) = (1,u,v), \Phi_u \times \Phi_v = (1,0,0)$
Cara 4: $\Phi(u,v) = (u,1,v), \Phi_u \times \Phi_v = (0,-1,0)$
Cara 5: $\Phi(u,v) = (0,u,v), \Phi_u \times \Phi_v = (1,0,0)$

$$\iint_S f\, dS = \int_0^1 \int_0^1 (u - 2v)\, dudv + \int_0^1 \int_0^1 (u + v)\, dudv + \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2u + v)\, dudv +$$
$$+ \int_0^1 \int_0^1 (u - 2 + v)\, dudv + \int_0^1 \int_0^1 (-2u + v)\, dudv = -\frac{1}{2}$$

1.3. Integral de superficie de un campo vectorial. Flujo

Sea S una superficie parametrizada regular a trozos con parametrización $\Phi(u,v)$ con $(u,v) \in D$. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de forma que $S \subseteq U$ y F es continuo en S. La integral de superficie de F (o flujo) sobre S se define como el número

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, dudv = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot N \, \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, dudv.$$

Interpretación del flujo. La integral de un campo vectorial F en la superficie S es la integral del campo escalar $f = F(\Phi) \cdot N$ en dicha superficie, siendo N el vector normal unitario a la superficie en cada punto, es decir

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F(\Phi(u,v)) \cdot N \, dS$$

Obsérvese que el valor de la integral de superficie depende de la dirección elegida del vector normal N, esto prueba que **su signo depende de la orientación de la parametrización tomada para S.**

Obsérvese que el flujo es tanto mayor cuando más pequeño sea el ángulo que forman el campo vectorial F y el vector normal N.

Propiedades de las integrales de superficie para campos vectoriales

Sean $F, G \colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales continuos en U y $S \subseteq U$ una superficie parametrizada regular a trozos.

1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\iint_S (\alpha F + \beta G) \cdot dS = \alpha \iint_S F \cdot dS + \beta \iint_S G \cdot dS.$
2. Si $-S$ representa la misma superficie S pero parametrizada con orientación opuesta a la dada inicialmente entonces
$$\iint_{-S} F \cdot dS = -\iint_S F \cdot dS.$$
3. Si $S = S_1 \cup S_2$ disjuntas con las orientaciones dadas por S, entonces
$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS.$$

Ejemplo. Calculemos el flujo exterior del campo vectorial $F(x,y,z) = pz\vec{k}$, con $p \in \mathbb{R}$ constante, a través de la superficie del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ por encima del eje XY.

Parametrizamos la superficie $\Phi(u,v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ con $-1 \le u \le 1$ y $-1 \le v \le 1$. Así el producto vectorial fundamental es

$$\Phi_u \times \Phi_v = (1, 0, -2u) \times (0, 1, -2v) = (2u, 2v, 1)$$

siendo dicho vector exterior a la superficie (para ello, por continuidad, basta comprobarlo en un punto cualquiera de la superficie). Así

$$\iint_S pz\vec{k} \cdot dS = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} p(1 - u^2 - v^2)\, dudv = \frac{4p}{3}$$

Nota: Obsérvese que con la parametrización trivial que hemos efectuado, el producto vectorial fundamental coincide con el gradiente del campo $g(x,y,z) = z + x^2 + y^2 - 1$ que resulta de la ecuación implicita $g(x,y,z) = 0$ que define el paraboloide.

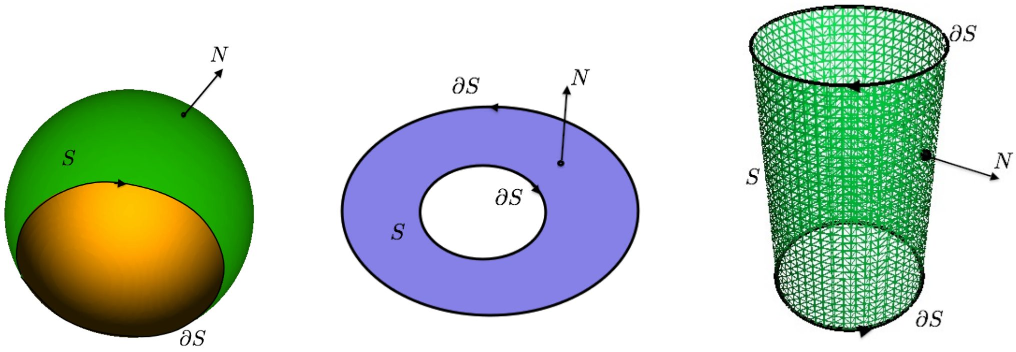


Figura 1: Distintas orientaciones compatibles entre una superficie acotada y su frontera.

2. Cálculo vectorial en el espacio: teorema de Stokes y teorema de Gauss

2.1. Teorema de Stokes

Orientaciones compatibles de una superficie y su curva frontera. Sea S una superficie parametrizada regular a trozos cuyo borde (frontera) ∂S es una curva parametrizada regular a trozos. Se dice que las parametrizaciones de S y ∂S tienen orientaciones compatibles si el movimiento en la curva y los vectores normales a la superficie siguen la regla del sacacorchos. Una forma de ver la orientación es situarnos sobre la frontera ∂S en la posición elegida del vector unitario normal a la superficie S de forma que el movimiento sobre la curva deje a la superficie a la izquierda.

El teorema de Stokes generaliza el teorema de Green que hemos visto en el tema anterior de integrales de línea.

Teorema de Stokes. Sea S una superficie acotada de $\mathbb{R}^3$ regular a trozos orientable y cuya frontera ∂S es una curva simple regular a trozos. Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U tal que $S \subseteq U$, entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{\partial S} F \cdot dC$$

donde S y ∂S tienen orientaciones compatibles.

Obsérvese que si la superficie sobre la que se integra está contenida en el plano XY el teorema de Stokes es precisamente el teorema de Green.

Ejemplos. Usaremos el teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS$ siendo $F(x,y,z) = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ y

1. S la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y en la parte superior del plano XY orientada hacia el interior.

   Para hallar la curva frontera ∂S restamos sus ecuaciones y obtenemos $z^2 = 3$. Una parametrización compatible de dicha curva será, entonces $\alpha(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t, \sqrt{3}\right)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ por lo que $\alpha'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$.

En consecuencia, por el teorema de Stokes:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{\partial S} F \cdot dC = \int_{\partial S} z\,dx + x\,dy + y\,dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\cos t - \operatorname{sen}^2 t)\,dt = -\pi$$

2. S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por encima del eje XY y por debajo del plano $z = x + y + 3$.

   La frontera de la superficie descrita está formada por dos curvas cerradas simples: la parte inferior es una circunferencia de radio 1 parametrizada (de forma compatible) por

   $$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \ \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

   y la superior es una elipse parametrizada

   $$\beta(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t + \cos t + 3) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

   Entonces

   $$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{\partial S} F \cdot dC = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt + \int_0^{2\pi} F(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\,dt =$$
   $$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt + \int_0^{2\,\pi} 3\cos^2 t + 3\cos t - 1\,dt = \pi + \pi = 2\pi$$

2.2. Divergencia. El teorema de Gauss

Divergencia de un campo vectorial. Si $F = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial de tres dimensiones de clase C^1 en un abierto U se llama *divergencia* de F en U al siguiente campo escalar:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Superficies cerradas. Una superficie regular a trozos se dice que es *cerrada* cuando encierra un volumen.

Una superficie regular cerrada define dos regiones disjuntas del espacio. Una de las regiones es acotada y recibe el nombre de región interior y la otra, no acotada, recibe el nombre de región exterior.

Por tanto, una superficie cerrada parametrizada S se puede elegir de forma que todos los vectores normales unitarios estén orientados hacia el interior o bien orientados hacia el exterior. En el primer caso decimos que tiene *orientación interior* y la representamos S^-. En caso contrario se dice que tiene *orientación exterior* y se representa S^+.

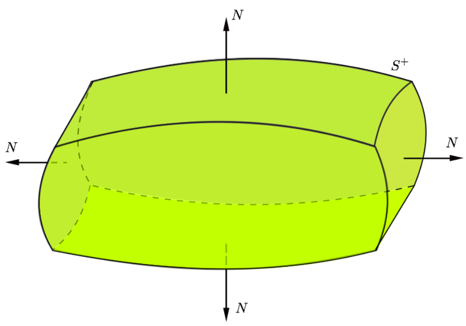


Figura 2: Superficie cerrada con orientación exterior.

Teorema de Gauss o de la divergencia. Sea S una superficie cerrada parametrizada regular a trozos. Sea V el volumen encerrado por S. Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U de forma que $V \subseteq U$ entonces

$$\iint_{S^+} F \cdot dS = \iiint_V div\, F\, dxdydz$$

donde S^+ representa la superficie S tomada con orientación exterior.

Ejemplo. Calculemos el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la esfera de radio 2, $\mathbb{S}^2(2)$.

Parametrizando la esfera $\Phi(u, v) = (2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 2 \cos u \operatorname{sen} v, 2 \cos v)$ con $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$, tenemos $\Phi_u = (2 \cos u \operatorname{sen} v, -2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 0)$ y $\Phi_v = (2 \operatorname{sen} u \cos v, 2 \cos u \cos v, -2 \operatorname{sen} v)$ y el producto vectorial fundamental es $\Phi_u \times \Phi_v = (4 \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, 4 \cos u \operatorname{sen}^2 v, 4 \cos v \operatorname{sen} v)$ (comprobamos que tiene orientación exterior)

$$\iint_{\mathbb{S}^2(2)^+} F \cdot dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 8 \operatorname{sen} v\, dudv = 32\pi$$

Vamos a hacer el mismo cálculo aplicando el teorema de Gauss. Para ello calculamos la divergencia, $\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$, de aquí

$$\iiint_V 3\, dxdydz = 3 \operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^2(2)\right) = 3 \frac{4\pi 2^3}{3} = 32\pi$$